مسایل حل شده از نظریه اعداد

انتخاب و حل: اصغر ناصری

۱. تمام اعداد طبیعی را بیابید که برای آنها $n+۱|n^۲+۱$.

حل – می‌دانیم اگر $a|b$ نگاه $a|nb$.

$$\begin{cases} n+۱|n^۲+۱ \\ n+۱|(n+۱)(n-۱) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n+۱|n^۲+۱ \\ n+۱|n^۲-۱ \end{cases} \Rightarrow n+۱|(n^۲+۱)-(n^۲-۱) \Rightarrow n+۱|۲$$

اما تنها شمارنده‌های ۲، خود ۲ و ۱ هستند:

$n+۱=۱ \rightarrow$ جواب ندارد

$n+۱=۲ \rightarrow n=۱$

۲. ثابت کنید حاصلضرب n عد طبیعی متوالی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

حل – با توجه به فرمول ترکیب داریم:

$$\binom{m+n}{n} = \frac{(m+n)!}{n!\,(m)!} = \frac{(m+n)(m+n-۱)(m+n-۲)\dots(m+۱)}{n!}$$

صورت کسر حاصلضرب n عدد طبیعی متوالی است و چون حاصل هر ترکیب یک عدد طبیعی است، صورت کسر بر $n!$ بخش‌پذیر است.

۳. ثابت کنید که $n^۵-۵n^۳+۴n$ همواره بر ۱۲۰ بخش‌پذیر است.

حل – طبق مساله قبلی داریم:

$$n^۵-۵n^۳+۴n = n(n^۴-۵n^۲+۴) = n(n^۲-۴)(n^۲-۱) = (n-۲)(n-۱)n(n+۱)(n+۲)$$

که حاصلضرب ۵ عدد متوالی بوده و در نتیجه بر $۱۲۰ = ۵!$ بخش‌پذیر است.

۴. بزرگترین عدد صحیح مثبت n را تعیین کنید که برای آن داشته باشیم $n+۱۰|n^۳+۱۰۰$.

حل –

$$n+۱۰|(n+۱۰)(n^۲-۱۰n+۱۰۰) \rightarrow n+۱۰|n^۳+۱۰۰۰$$

$$\begin{cases} n+۱۰|n^۳+۱۰۰ \\ n+۱۰|n^۳+۱۰۰۰ \end{cases} \rightarrow n+۱۰|۹۰۰ \rightarrow n+۱۰=۹۰۰ \rightarrow n=۸۹۰$$

۵. ثابت کنید به ازای تمامی اعداد صحیح مثبت، کسر $\frac{۲۱n+۴}{۱۴n+۳}$ ساده نشدنی است.

حل – فرض کنیم $(۲۱n+۴, ۱۴n+۳)=d$:

$$\begin{cases} d|۲۱n+۴ \\ d|۱۴n+۳ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} d|۴۲n+۸ \\ d|۴۲n+۹ \end{cases} \rightarrow d|(۴۲n+۹)-(۴۲n+۸) \rightarrow d|۱ \rightarrow d=۱$$

بنابراین صورت و مخرج کسر شمارنده مشترکی غیر از ۱ ندارند و این کسر ساده نشدنی است.

۶. برای چه مقادیر صحیح، کسر $\frac{۲n-۱}{n+۷}$ یک عدد صحیح است؟

حل – باید صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد:

$$\frac{۲n-۱}{n+۷}=\frac{۲(n+۷)-۱۵}{n+۷}=۲-\frac{۱۵}{n+۷}\rightarrow (n+۷)|۱۵$$
$$n+۷=\pm۱,\pm۳,\pm۵,\pm۱۵\rightarrow\ \ n\in\{-۲۲,-۱۲,-۱۰,-۶,-۴,-۲,۸\}$$

۷. بزرگترین عدد صحیح مثبت را بیابید که برای آن $۲۳^{۶+x}$ عدد $۲۰۰۰!$ را بشمارد.

حل – در میان اعداد ۱ تا ۲۰۰۰ تعداد $۸۶=\left[\frac{۲۰۰۰}{۲۳}\right]$ مضرب ۲۳ وجود دارد. این مضارب عبارتند از:

$$۲۳,۲(۲۳),۳(۲۳),\dots ۲۳(۲۳),\dots,۴۶(۲۳),\dots,۶۹(۲۳),\dots\ ,۸۶(۲۳)$$

از میان این اعداد، مضارب ۲۳(۲۳)، ۴۶(۲۳) و ۶۹(۲۳) خود دارای یک ضریب ۲۳ هستند. بنابراین $۲۰۰۰!$ دارای یک عامل $۲۳^{۸۶+۳}$ یا $۲۳^{۸۹}$ است. به عبارتی $۲۳^{۸۹}|۲۰۰۰!$ و:

$$۶+x=۸۹\Rightarrow x=۸۳$$

۸. ثابت کنید عدد $۲^{۹۹}+۲^{۹}$ بر ۱۰۰ بخش پذیر است.

حل – با توجه به فرمول $a^۳+b^۳=(a+b)(a^۲-ab+b^۲)$ داریم:

$$۲^۹+۲^{۹۹}=\left(۲^۳\right)^۳+\left(۲^{۳۳}\right)^۳=\left(۲^۳+۲^{۳۳}\right)\left(۲^۶-۲^{۳۶}+۲^{۶۶}\right)$$
$$=\left(۲^۱+۲^{۱۱}\right)\left(۲^۲-۲^{۱۲}+۲^{۲۲}\right)\left(۲^۶-۲^{۳۶}+۲^{۶۶}\right)=۲۰۵۰\cdot(۲k)(۲k')=۸۲۰۰kk'$$

بنابراین عدد مزبور بر ۱۰۰ بخش‌پذیر است.

۹. تمام جوابهای طبیعی معادله $x^۲-xy+y^۲=۱۳$ را پیدا کنید.

حل – پیداست که هر دو متغیر نمی‌توانند زوج باشند، زیرا در غیر اینصورت طرف اول تساوی زوج خواهد بود.

$$x^۲-۲xy+y^۲+xy=۱۳\rightarrow(x-y)^۲+xy=۱۳\rightarrow(x-y)^۲=۱۳-xy$$
$$۱۳-xy\geq ۰\rightarrow xy\leq ۱۳$$

باید $۱۳-xy$ مربع کامل باشد و تنها حالتهای ممکن عبارت است از:

$$۱۳-xy=۱\rightarrow xy=۱۲\rightarrow x=۴,y=۳$$

$۱۳-xy=۴\rightarrow xy=۹\rightarrow x=۱,y=۹$ یا $x=۳\ ,y=۳$ هیچکدام در معادله صدق نمی‌کنند

$$۱۳-xy=۹\rightarrow xy=۴\rightarrow x=۴,y=۱$$

پس جوابهای معادله عبارت است از $x=۴$ و $y=۳$ یا $x=۴$ و $y=۱$.

۱۰. ثابت کنید هرگاه $(a,b)=(a,c)=۱$ آنگاه $(a,bc)=۱$.

حل – هرگاه $(a,b)=۱$ آنگاه اعداد صحیح r و s وجود دارند به طوری که $ra+sb=۱$. عکس این قضیه نیز برقرار است. بنابراین:

$$ra+sb=۱\ ;ma+nc=۱\rightarrow(ra+sb)(ma+nc)=۱\rightarrow rma^۲+rnac+smab+snbc=۱$$
$$(rma+rnc+smb)a+(sn)bc=۱\rightarrow r_۱a+s_۱bc=۱\rightarrow(a,bc)=۱$$

۱۱. ثابت کنید اگر k عددی طبیعی باشد خواهیم داشت: $(ka,kb)=k(a,b)$.

......